Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Dr. Rémi Jaoui — Wintersemester 2021/2022

Bewertete Körper

Blatt 1

Abgabe: 02.11.2021

Aufgabe 1 (3 Punkte).

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X ist *zusammenhängend*, falls es keine offenen Teilmengen U und V von X mit $A \subset U \cup V$ derart gibt, dass $U \cap V \cap A = \emptyset$, aber $\emptyset \neq U \cap A \neq A$.

Sei $(G, \mathcal{T})$ nun eine topologische Gruppe mit der Eigenschaft, dass es für jedes Element $g \neq 1_G$ aus G offene disjunkte Teilmengen U und V mit g in U und 1_G in V so gibt, dass $G = U \cup V$. Zeige, dass die einzigen nichtleeren zusammenhängenden Teilmengen von G die Einermengen sind.

Aufgabe 2 (12 Punkte).

Sei $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf dem Körper K. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *Cauchyfolge*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein n_0 derart existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq n_0.$$

(a) Zeige, dass jede Cauchyfolge konvergiert, falls der Absolutbetrag trivial ist.

(b) Zeige, dass die Folge der reelle Zahlen $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Schließe daraus, dass die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(c) Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Cauchyfolgen aus K mit koordinatenweiser Summe und Multiplikation. Zeige, dass $\mathcal{R}$ ein (kommutativer) Ring mit Eins ist. Ist $\mathcal{R}$ ein Integritätsbereich?

(d) Zeige, dass der Körper K sich in $\mathcal{R}$ einbetten lässt.

(e) Zeige, dass $\mathcal{N} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge mit } a_n \to 0\}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{R}$ ist. Schließe daraus, dass $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ eine Körpererweiterung von K ist.

(f) Gegeben eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, setze

$$s_n = \sum_{k\leq n} a_k.$$

Wir nehmen nun an, dass der Absolutbetrag nichtarchimedisch ist. Zeige, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn $a_n \to 0$.

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Sei R ein kommutativer Ring, welcher genau ein maximales Ideal $\mathfrak{M}$ besitzt.

(a) Zeige, dass für jedes r aus $\mathfrak{M}$ das Element $1 - r$ eine Einheit von R ist.

(b) Zeige, dass für jeden R-Modul M die Menge $\mathfrak{M} \cdot m = \{r \cdot m\}_{r\in\mathfrak{M}}$ ein Teilmodul von M ist.

(c) Schließe daraus, dass für jeden R-Modul M das Element m aus M genau dann Null ist, wenn m in $\mathfrak{M} \cdot m$ liegt.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.30 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 15 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden. Das Blatt kann zu zweit eingereicht werden.